试卷代号:0868 **座位号**

国家开放大学(中央广播电视大学)2017年秋季学期"开放本科"期末考试

几何基础　试题(半开卷)

2018年1月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、选择题(每小题4分,本题共20分)

1. 两个向量平行的充要条件是二者的对应分量(　　).

A. 不成比例　　B. 二者内积为零

C. 成比例　　D. 不一定

2. 点列之间的射影对应是由(　　).

A. 四对对应点唯一确定　　B. 三对对应点唯一确定

C. 两对对应点唯一确定　　D. 无限对对应点唯一确定

3. 若无穷远直线关于二次曲线 Γ 的极点为无穷远点,则 Γ 与无穷远直线(　　).

A. 不相切　　B. 有两个不同交点

C. 相离　　D. 相切

4. 极线上的点与极点(　　).

A. 共轭　　B. 不共轭

C. 可能不共轭　　D. 不可判定

5. 下面(　　)具有仿射不变性.

A. 距离　　B. 平行

C. 角度　　D. 长度

得　分	评卷人

二、填空题(每小题 4 分,本题共 20 分)

6. 仿射变换把三角形的中线变成________________.

7. 已知共线四点 A、B、C、D 的交比 $(CD,AB)=2$,则 $(CA,BD)=$________.

8. 射影对应把三角形中线变成________________________________.

9. 不重合的________对应元素,确定唯一一个对合对应.

10. 公理法的结构包括____.

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 10 分,共 30 分)

11. 求使直线 $x+y-1=0$ 的每个点不变,且把点 $(1,2)$ 变成点 $(-1,3)$ 的仿射变换.

12. 若直线 l_1,l_2,l_3,l_4 的方程为 $x-y-1=0$, $2x+y-3=0$, $3x-y=0$, $6x-1=0$,求 (l_1l_2,l_3l_4).

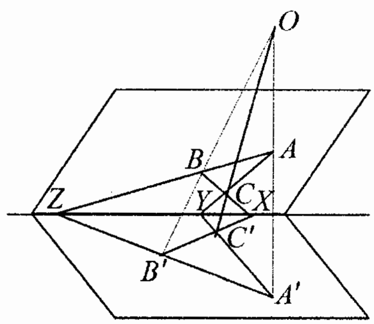
13. 求点 $(1,-1,1)$ 关于二阶曲线 $x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=0$ 的极线.

得　分	评卷人

四、证明题(每小题 10 分,共 30 分)

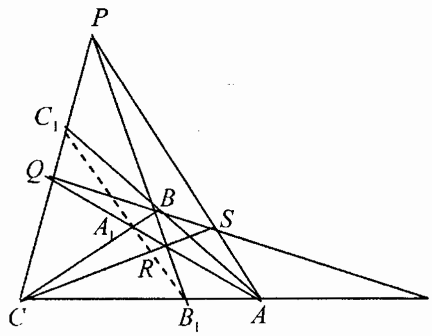
14. 证明过三角形的顶点且平行于对边的三条直线可做一个三角形.

15. 证明如果两个三角形对应边的交点共线,则对应顶点的连线共点.



第 15 题图

16. 设 P、Q、R、S 是完全四点形的顶点，$A=PS\times QR$，$B=PR\times QS$，$C=PQ\times RS$，证明 $A_1=BC\times QR$，$B_1=CA\times RP$，$C_1=AB\times PQ$ 三点共线.



第 16 题图

试卷代号:0868

国家开放大学(中央广播电视大学)2017年秋季学期"开放本科"期末考试

几何基础　试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2018年1月

一、选择题(每小题4分,本题共20分)

1.C　　2.B　　3.D　　4.A　　5.B

二、填空题(每小题4分,本题共20分)

6. 三角形的中线

7. -1

8. 过顶点相交于对边的任意一条直线

9. 两对

10. 原始概念的列举;定义的叙述;公理的叙述;定理的叙述和证明.

三、计算题(每小题10分,共30分)

11. 解　设所求的仿射变换为

$$\begin{cases} x'=a+a_{11}x+a_{12}y \\ y'=b+a_{21}x+a_{22}y \end{cases}, \cdots\cdots 3\text{分}$$

在直线 $x+2y-1=0$ 上任取两点(1,0),(-1,1),

则所求的仿射变换把三点(1,2),(1,0),(-1,1),分别变成点(-1,3),(1,0),(-1,1),将这三对点代入仿射变换式得

$$\begin{cases} -1=a+a_{11}+2a_{12} \\ 3=b+a_{21}+2a_{22} \\ 1=a+a_{11} \\ 0=b+a_{21} \\ -1=a-a_{11}+2a_{12} \\ 1=b-a_{21}+a_{22} \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} a=1 \\ b=-\dfrac{1}{4} \\ a_{11}=0 \\ a_{12}=-1 \\ a_{21}=\dfrac{1}{4} \\ a_{22}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$ ·· 8 分

因此，所求的仿射变换式为
$$\begin{cases} x'=-y+1 \\ y'=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$ ·· 10 分

12. 解　l_1,l_2,l_3,l_4 与 x 轴的交点分别为

$x_1=1,x_2=\dfrac{3}{2},x_3=0,x_4=\dfrac{1}{6}$， ·· 5 分

于是
$$(l_1l_2,l_3l_4)=\frac{(0-1)(\frac{1}{6}-\frac{3}{2})}{(\frac{1}{6}-1)(0-\frac{3}{2})}=\frac{16}{15}$$ ······················ 10 分

13. 解　将点(1，−1，1)的坐标及 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 的值代入极线方程

$(a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3)x_1+(a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3)x_2+(a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3)x_3=0$

·· 3 分

即　$(1+3+1)x_1+(-3-1+1)x_2+(1-1+1)x_3=0$ ········

·· 8 分

整理即得所求极线方程

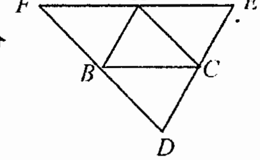
$5x_1-3x_2+x_3=0.$ ·· 10 分

四、证明题(每小题 10 分，共 30 分)

14. 证明　如图，

设 $\overrightarrow{AB}=\vec{c},\overrightarrow{BC}=\vec{a},\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，则 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ ·· 3 分

设 EF,FD,DE 依次是过△ABC 三个顶点 A,B,C 且平行于对边的三条直线，则 $AB \underline{\underline{/\!/}} kDE,BC \underline{\underline{/\!/}} kEF,CA \underline{\underline{/\!/}} kFD$，······ 7 分



第 14 题图

于是 $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{k}\vec{a},\overrightarrow{FD}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{k}\vec{b}$，

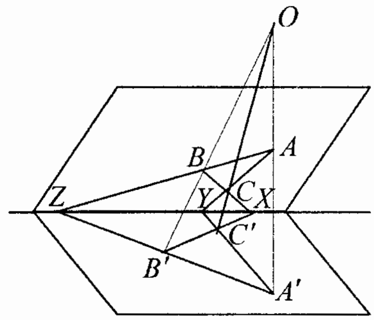
$\overrightarrow{ED}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{k}\vec{c}$，

$$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{ED}=\frac{1}{k}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{k}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{k}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{k}\vec{a}+\frac{1}{k}\vec{b}+\frac{1}{k}\vec{c}=\frac{1}{k}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0,$$

即，以 $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FD}$，$\overrightarrow{ED}$ 为边可作成一个三角形． …………………………………… 10 分

15. 证明　如图所示，若三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 的对应边 BC 与 $B'C'$ 的交点 X，AC 与 $A'C'$ 的交点 Y，AB 与 $A'B'$ 的交点 Z 共线，考虑三点形 XBB'，YAA'，……………………… 5 分

由于 XY 与 AB，$A'B'$ 都交于 Z，由笛沙格定理，三组对应边的交点 C，C'，O 共线，于是 AA'，AB'，CC' 共线． ………………………………………………………………… 10 分



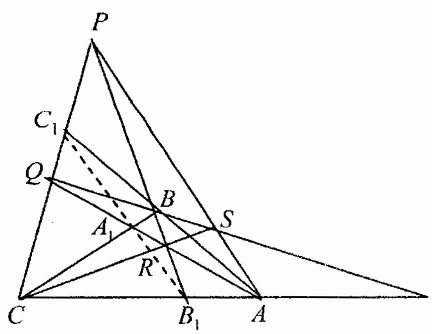
第 15 题图

16. 证明　在 $\triangle ABC$ 及 $\triangle PQR$ 中，

∵　AP、BQ、CR 共点 S，……………………………………………………………… 5 分

∴　由笛沙格定理，对应边的交点 $C_1=AB\times PQ$，$B_1=CA\times RP$，$A_1=BC\times RQ$ 三点共线．

……………………………………………………………………………………………… 10 分



第 16 题图