试卷代号：0877　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**座位号**□□

国家开放大学(中央广播电视大学)2017年春季学期"开放本科"期末考试

数学分析专题研究　试题(半开卷)

2017年6月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、单项选择题(每小题4分，共20分)

1. 设 $f: X\to Y$，则 $\forall A\subset X, f^{-1}(f(A))=A \Leftrightarrow f$ 是(　　).

A. 单射　　　　B. 满射

C. 有界函数　　　　D. 可微函数

2. 已知 $\varphi(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$，则 $\varphi(x)=$(　　).

A. $\sin x$　　　　B. $\cos x$

C. e^x　　　　D. $\ln x$

3. 复数集 **C**(　　).

A. 可以成为有序域　　　　B. 不能成为有序域

C. 不能成为有序集　　　　D. 前三个结论都不对

4. 若 $\varphi(x)$ 在点 $x=a$ 可导，则 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\varphi(a-t)-\varphi(a+t)}{t}=$(　　).

A. $-2\varphi'(a)$　　　　B. $2\varphi'(a)$

C. $-\frac{1}{2}\varphi'(a)$　　　　D. $\frac{1}{2}\varphi'(a)$

5. 函数 $y=f(x)$ 定义在 (a,b) 上，$x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的极大值点，则(　　)

A. x_0 是 $f(x)$ 的最大值点　　　　B. $f(x)$ 存在最大值

C. $f(x)$ 不存在最大值　　　　D. x_0 是 $-f(x)$ 的极小值点

得　分	评卷人

二、填空题(每小题 4 分,共 20 分)

6. 集合 $A=\{a,b,c,d\}$,R 是 A 上的等价关系,且 $A/R=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$,则 $R=$ ________.

7. $\int_0^{2\pi}(\sin^3 x+\cos^2 x)\mathrm{d}x=$ ________.

8. 若 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的下凸函数,则对于 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$,$\forall \alpha\in(0,1)$,有 $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leqslant$ ________.

9. 已知 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,则 $f(f(x))=$ ________.

10. 若函数 $f(x)$ 可导,且 $f(a)=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(a+\frac{1}{n^2})=$ ________.

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 15 分,共 30 分)

11. 求曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$(其中 $x\in(-1,1)$)上任一点 (x_0,y_0) 处的切线方程.

12. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 围成的图形的面积.

得　分	评卷人

四、证明题(每小题 15 分,共 30 分)

13. 设 $f:X\to Y$,证明,f 是双射 $\Leftrightarrow \forall A\subset X$,有 $f(X-A)=Y-f(A)$.

14. 设 $x>0,y>0$ 且 $x\neq y$,则有

$$(x+y)\ln\frac{x+y}{2}<x\ln x+y\ln y.$$

试卷代号：0877

国家开放大学(中央广播电视大学)2017年春季学期"开放本科"期末考试

数学分析专题研究　试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2017年6月

一、单项选择题(每小题4分,共20分)

1. A　　2. C　　3. B　　4. A　　5. D

二、填空题(每小题4分,共20分)

6. $\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$

7. 0

8. $\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$

9. $1-\dfrac{1}{x}$

10. 0

三、计算题(每小题15分,共30分)

11. 解：先来求 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在任意点 (x_0,y_0) 的切线斜率 $y'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

故 $k(x_0,y_0)=\dfrac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}$，从而切线方程 $y-y_0=-\dfrac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}(x-x_0)$　　10分

注意到 $y_0=\sqrt{1-x_0^2}$，故

$$-y_0(y-y_0)=x_0x-x_0^2$$

即 $y_0y+x_0x=1$　　15分

12. 解：设所求的面积为 S，由于图形关于 x 轴对称，关于 y 轴对称，故其面积是所在第一象限面积的4倍，因而

$$S=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$　　7分

设 $x=a\sin t$，则 $dx=a\cos t\,dt$，且当 $x=0$ 时，$t=0$，$x=a$ 时，$t=\dfrac{\pi}{2}$，

所以有 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b}{a}a^2\cos^2 t\,dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2t)\,dt$

$=2ab(t+\frac{1}{2}\sin2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab$ 15 分

四、证明题(每小题 15 分,共 30 分)

13. 证明:"⇒"已知 f 是双射.

$\forall y\in f(X-A)$,则存在 $x\in X-A$,$y=f(x)$,故 $y\in Y-f(A)$

即 $f(X-A)\subset Y-f(A)$

$\forall y\in Y-f(A)$,$\exists x\in X-A$,$y=f(x)$,故 $y\in f(X-A)$

即 $f(X-A)\supset Y-f(A)$,故有 $f(X-A)=Y-f(A)$ 8 分

"⇐"先证 f 满:取 $A=\phi$,即有 $f(X)=Y$

再证 f 单. 假设 f 不是单射,即存在 $a_1,a_2\in X$,$a_1\neq a_2$

$f(a_1)=f(a_2)$. 选取 $A=\{a_1\}$

一方面,$f(X-A)=f(X-\{a_1\})=f(X)=Y$

另一方面,$f(X-A)=Y-f(A)=Y-\{f(a_1)\}$

矛盾,故 f 是单射

由于 f 即是单射又是满射,故 f 是双射. 15 分

14. 证明:设 $f(x)=x\ln x$. 则对于 $x>0$ 有,

$$f'(x)=\ln x+1,\qquad f''(x)=\frac{1}{x}>0$$

故 $f(x)$是严格下凸函数, 8 分

由下凸函数的性质有

$$f(\frac{x+y}{2})<\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$$

即 $(x+y)\ln\frac{x+y}{2}<x\ln x+y\ln y$ 15 分